



אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

כיתות ח'

אנא מלאו את כל הפרטים האישיים בכתב ברור!

שם פרטי	שם משפחה	טלפון	בית ספר
דוא"ל		כתובת דואר	תעודת זהות

לפניכם שאלון מתמטי. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן.

המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלב נוסף של התחרות ע"ש בנו-ארבל במטרה להרכיב קבוצת נבחרת העתודה של נבחרת ישראל במתמטיקה. פתרונות ופרטים נוספים יופיעו באתר <http://taharut.org/imo>.

כתבו בטבלה המצורפת את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לגמק. אין להשתמש במחשבון. משך התחרות: 90 דקות.

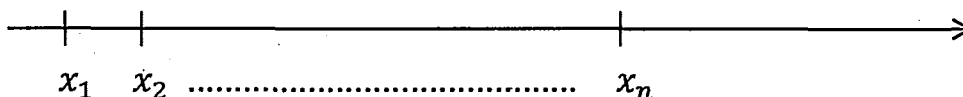
טבלת תשובות:

1.	2. א. ב.
3.	4.
5.	6.
7.	8.
9.	

שאלון – כיתות ח'

1. חזקה שלישית של המספר קטנה פי-8 מריבועו. מהו המספר?

2. על הציר מסומנים n נקודות שונות משמאל לימין: x_1, x_2, \dots, x_n

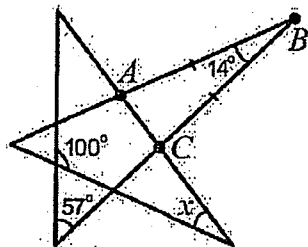


מצאו את כל הנקודות x על הישר, כך שסכום מרחקים מ- x עד לנקודות x_1, x_2, \dots, x_n יהיה קטן ביותר במקרה ש:

א. $n = 2013$
 ב. $n = 2014$

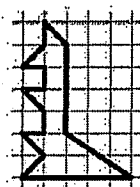
3. לחלק 20 משקולות של 1 גר, 2 גר, ..., 20 גר ל-6 ערמות שווה משקל.

4. פתרו אי-שוויון $x - 1 < \{x\} \cdot [x]$, כאשר $[x]$ - ערך שלם של x , ו- $\{x\}$ - ערך שברי של x , ז"א $\{x\} = x - [x]$.



5. בסרטוט הבא נתונים גודליהן של שלוש זוויות. כמו כן, ידוע, כי $AB = BC$. מה גודלה של הזווית x ?

6. נתונים שני מספרים טבעיים x ו- y , כך ש: $12x$ ו- $18y$ הם מספרים ריבועיים. מהו הערך המינימאלי האפשרי של $x+y$?



7. מהו מספר המשולשים המינימאלי שאליו ניתן לחתוך את הצורה שבציור:

8. מכפלתם של כל המחלקים של מספר n כלשהו (כולל המספר n עצמו) היא מספר שמסתיים ב-15 אפסים בדיוק. מהו מספר האפסים המקסימאלי בו יכול להסתיים המספר n ?

9. בטבלה 3×3 סדרו מספרים כלשהם כך שמכפלת המספרים בכל טור של הטבלה שווה ל-1, ומכפלת המספרים בכל שורה של הטבלה שווה ל-1, ומכפלת המספרים בכל ריבוע 2×2 שיש בטבלה שווה ל-2. איזה מספר נמצא במשבצת המרכזית של טבלה זו?

בהצלחה!



אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY



מדינת ישראל
משרד החינוך

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה לכיתות ח' – שלב א'

נא למלא את כל הפרטים האישיים בכתב ברור!

שם פרטי	שם משפחה	טלפון	כיתה	בית ספר
דוא"ל		כתובת דואר		

לפניכם שאלון מתמטי. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן.

המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדה הבינלאומית למתמטיקה.

פתרונות השאלות ופרטים נוספים יופיעו באתר <http://taharut.org/imo>.

- מלאו בטבלה המצורפת תשובות סופיות בלבד – אין צורך לנמק.
- בשאלות, בהן קיימת יותר מתשובה אחת, יש לציין את כל התשובות האפשריות.
- אסור להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

טבלת תשובות:

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.

שאלון - כיתות ח'

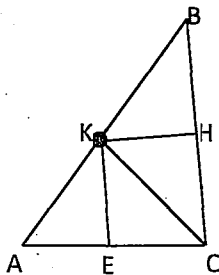
1. רגע נקרא קסום, אם מספר השעות על השעון האלקטרוני זהה למספר הדקות. כדי לבשל מנה קסומה, יש להתחיל ולסיים את הבישול ברגעים קסומים. ועל מנת שזה יצא טעים, יש לבשל בין שעה וחצי לשעתיים. כמה זמן דרוש, כדי להכין מנה קסומה וטעימה?
2. פו-הדוב ואיה אכלו צנצנת ריבה וסלסלת עוגיות, כאשר הם התחילו וסיימו בו-זמנית. תחילה פו-הדוב אכל ריבה ואיה אכל עוגיות, וברגע מסוים הם התחלפו. כל אחד מהם אוכל ריבה ועוגיות בקצב קבוע. פו-הדוב אכל גם את הריבה וגם את העוגיות פי-3 יותר מהר מאיה. בסוף התברר, שהם אכלו אותה כמות של עוגיות. איזה חלק מהריבה אכל פו-הדוב?

3. יוסי רץ במסלול מעגלי. פעם ב-5 דקות הוא חולף על פניה של דנה המתנדנדת בנדנדה, ופעם ב-15 דקות הוא עוקף את חיים, שגם כן רץ באותו מסלול מעגלי. ברגע כלשהו יוסי הסתובב והתחיל לרוץ, בדיוק באותה המהירות בה הוא רץ קודם, אך בכיוון ההפוך. באיזו תדירות הוא יפגוש את חיים?

4. קבוצת ילדים חשבה על מספר טבעי, ולאחר מכן הם אמרו את 9 המשפטים הבאים: "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-2", "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-3, ואינו מתחלק ב-2", "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-4, ואינו מתחלק ב-3", ... , "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-10, ואינו מתחלק ב-9". מהי כמות המשפטים הנכונים הגדולה ביותר שיכולה להיות?

5. החליפו את האותיות בספרות על מנת לקבל שוויון נכון (אותיות זהות – ספרות זהות, אותיות שונות – ספרות שונות).

$$\overline{\text{הבהבה}}^2 = \overline{\text{להט}}$$



6. במשולש ABC בחרו נקודה K על הצלע AB. KE הוא חוצה-זווית AKC, ו-KH הוא אנך ל-BC. נתון, כי $BC \parallel KE$. מצאו את BC, אם $HC = 3$.

7. משה כפל מספר חמש-ספרתי בסכום ספרותיו. לאחר מכן הוא כפל את התוצאה בסכום ספרותיה. המכפלה שהתקבלה הינה מספר חמש-ספרתי. מהו המספר שמשה כפל בהתחלה? מצאו את כל הפתרונות האפשריים.
8. מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר, אשר נותן שארית 6 בחילוק ב-9, שארית 8 בחילוק ב-10, ושארית 10 בחילוק ב-11.
9. כמה מספרים טבעיים $n \leq 2013$ קיימים, כך שהסכום $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ מסתיים ב-0?

בהצלחה!

פתרונות

שאלה	פתרון
<p>1. רגע נקרא קסום, אם מספר השעות על השעון האלקטרוני זהה למספר הדקות. כדי לבשל מנה קסומה, יש להתחיל ולסיים את הבישול ברגעים קסומים. ועל מנת שזה יצא טעים, יש לבשל בין שעה וחצי לשעתיים. כמה זמן דרוש, כדי להכין מנה קסומה וטעימה?</p>	<p>1. תשובה: שעה ו-38 דקות (שעון של 24 שעות) או שעה ו-50 דקות (שעון של 12 שעות). פתרון: רגעים קסומים הם 00:00, 01:01, ..., 22:22, 23:23. קל לראות, כי במסגרת היממה אין הפרשי רגעים, שהם בין 1.5 ל-2 שעות. זה יכול לקרות רק במעבר מיום למחרת. יש 2 מקרים: מ-22:22 עד 00:00 או מ-23:23 עד 01:01. * ניתוח דומה לגבי שעון של 12 שעות.</p>
<p>2. פו-הדוב ואיה אכלו צנצנת ריבה וסלסלת עוגיות, כאשר הם התחילו וסיימו בו-זמנית. כל אחד מהם אוכל ריבה ועוגיות בקצב קבוע. תחילה פו-הדוב אכל ריבה ואיה אכל עוגיות, וברגע מסוים הם התחלפו. פו-הדוב אכל גם את הריבה וגם את העוגיות פי-3 יותר מהר מאיה. בסוף התברר, שהם אכלו אותה כמות של עוגיות. איזה חלק מהריבה אכל פו-הדוב?</p>	<p>2. תשובה: 9/10. פתרון: איה הקדיש לעוגיות פי-3 זמן יותר, אז פו-הדוב הקדיש לריבה פי-3 זמן יותר ואכל פי-3 מהר יותר. ז"א הוא אכל פי-3 יותר ריבה, מאשר איה.</p>
<p>3. יוסי רץ במסלול מעגלי פעם ב-5 דקות הוא חולף על פניה של דנה המתנדנדת בנדנדה, ופעם ב-15 דקות הוא עוקף את חיים, שגם כן רץ באותו מסלול מעגלי. ברגע כלשהו יוסי הסתובב והתחיל לרוץ, בדיוק באותה המהירות בה הוא רץ קודם, אך בכיוון ההפוך. באיזו תדירות הוא יפגיש את חיים?</p>	<p>3. תשובה: פעם ב-3 דקות. פתרון: נסמן את היקף המסלול המעגלי ב-S, ואת מהירויותיהם של יוסי וחיים ב-v_1 ו-v_2 בהתאמה. מהנתון בשאלה נקבל ש: $\frac{S}{v_1} = 5$ ו-$\frac{S}{v_2} = 15$ כאשר יוסי מסתובב, מהירות ההתקרבות שלו לחיים הופכת להיות: $v_1 + v_2$, ותדירות הפעמים בדקות שיוסי יעקוף את חיים תהיה: $\frac{S}{v_1 + v_2}$. נחשב את ערכו של ביטוי זה:</p> $\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{v_1} = 5 \\ \frac{S}{v_1 - v_2} = 15 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{S}{5} \\ v_1 - v_2 = \frac{S}{15} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_2 = \frac{2S}{15} \\ v_1 + v_2 = \frac{S}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{S}{v_1 + v_2} = 3$
<p>4. קבוצת ילדים חשבה על מספר טבעי, ולאחר מכן הם אמרו את 9 המשפטים הבאים: "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-2", "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-3", ואינו מתחלק ב-2", "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-4", ואינו מתחלק ב-3", ... , "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-10", ואינו מתחלק ב-9". מהי כמות המשפטים הנכונים הגדולה ביותר שיכולה להיות?</p>	<p>4. תשובה: 4 משפטים. פתרון: ברור שאף שני משפטים רצופים אינם יכולים להיות שניהם נכונים. לכן לא ייתכן שיותר מ-5 מבין המשפטים יהיו נכונים. כעת, נשים לב, שאם יש 5 משפטים נכונים, אזי המשפטים הנכונים בהכרח חייבים להיות משפטים מספר: 1,3,5,7,9. אולם משפטים מספר 3 ("המספר עליו חשבנו מתחלק ב-4", ואינו מתחלק ב-3"), ו-5 ("המספר עליו חשבנו מתחלק ב-6", ואינו מתחלק ב-5"), סותרים אחד את השני (הסתירה היא בהתחלקות ב-3), ולכן אינם יכולים להיות שניהם נכונים. לכן לא ייתכן, שיותר מ-4 מבין המשפטים יהיו נכונים. דוגמא למספר טבעי בו 4 מבין המשפטים נכונים היא, למשל, המספר 40.</p>
<p>5. החליפו את האותיות בספרות על מנת לקבל שוויון נכון (אותיות זהות – ספרות זהות, אותיות שונות – ספרות שונות).</p> $\overline{\text{הבה}}^2 = \overline{\text{להט}}$	<p>5. תשובה: $264^2 = 69696$</p>

6. תשובה: $BC = 6$.
פתרון: מאחר וזוויות AKC ו- BKC צמודות, אז הזווית בין חוצי-זוויות שלהן היא בת 90° .
 מכאן: חוצה-זווית BKC מאונך ל- BC ($BC \parallel KE$), ז"א מתלכך עם גובה KH .
 אם חוצה-זווית הוא גם גובה, אז הוא גם תיכון, ז"א $BC = 2HC = 6$

6. במשולש ABC בחרו נקודה K על הצלע AB .
 KE הוא חוצה-זווית AKC , ו- KH הוא אנך ל- BC .
 נתון, כי $BC \parallel KE$.
 מצאו את BC , אם $HC = 3$.

7. תשובה: $10000, 11000, 10100, 10010, 10001$.
פתרון: נסמן ב- n את המספר ההתחלתי, ב- a את סכום הספרות שלו, וב- b את סכום הספרות של המספר na . מהנתון בשאלה נקבל כי:
 $ab < 10n$, ולכן: $ab \leq 9$.
 אם $a = 1$, אזי: $n = 10000$, ומקרה זה מתאים לתנאי השאלה.
 אם $a = 2$, אזי: $b = 4$, ומבין כל ערכי n השונים שיכולים להיות
 (10001, 10010, 10100, 11000, 20000), פרט ל-20000, כולם מתאימים לתנאי השאלה.

7. משה כפל מספר חמש-ספרתי בסכום ספרותיו. לאחר מכן הוא כפל את התוצאה בסכום ספרותיה. המכפלה שהתקבלה הינה מספר חמש-ספרתי. מהו המספר שמשה כפל בהתחלה? מצאו את כל הפתרונות האפשריים.

אם $a = 3$, אזי: n מתחלק ב-3. לכן: $an = 3n$ מתחלק ב-9, ואז גם b מתחלק ב-9. ובמקרה זה: $ab > 3 \cdot 9 > 10$, ומקבלים סתירה לכך ש: $ab \leq 9$.
 אם $a = 4$, אזי: n מותיר שארית 4 בחלוקה ב-9, ולכן: $an = 4n$ מותיר שארית 7 בחלוקה ב-9, ואז גם b מותיר שארית 7 בחלוקה ב-9, ושוב מקבלים כי: $ab > 10$, סתירה.
 לבסוף, אם $a \geq 5$, אזי: $b < \frac{10}{a} < 2$, כלומר: $b = 1$. אולם המספר an נמצא בטווח המספרים שבין 10000 לבין 100000, ולכן לא ייתכן, שסכום ספרותיו יהיה 1.

8. תשובה: 978.
פתרון:
 $N = 9k + 6$
 $N = 10t + 8 + 12$
 $N = 11n + 10$
 אז 9: $N + 12 = 9k + 18$
 אז 10: $N + 12 = 10t + 20$
 אז 11: $N + 12 = 11n + 22$
 המספר הטבעי הקטן ביותר שמתחלק ב-9, 10, 11, הוא $N + 12 = 9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$.
 מכאן $N = 978$

8. מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר, אשר נותן שארית 6 בחילוק ב-9, שארית 8 בחילוק ב-10, ושארית 10 בחילוק ב-11.

9. תשובה: 1510.
פתרון: לכל המספרים הטבעיים קיים מחזור של 4 פעמים בחזקות, שאחריהם הם חוזרים לאותם ספרי היחידות. במקרה שלנו קל לבדוק, כי עבור n הנותן שארית 1, 2, או 3 בחילוק ב-4 סכום הספרות האחרונות מסתיים ב-0.
 ורק עבור n שמתחלק ב-4 סכום הספרות האחרונות הוא $6 + 1 + 6 + 1$,
 לא מסתיים ב-0. אז יש $\frac{2013-1}{4} = 503$ מקרים, שלא מתאימים לנו. ז"א $2013 - 503 = 1510$ מקרים, שמתאימים.

9. כמה מספרים טבעיים $n \leq 2013$ קיימים, כך שהסכום $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ מסתיים ב-0?