מדינת ישראל
משרד החינוך
ה' בחשון תשע"ה

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY
29.10.2014

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

כיתות ט'

אנא מלאו את כל הפרטים האישיים בכתב ברור!

שם פרטי	שם משפחה	טלפון	בית ספר

דוא"ל	כתובת דואר	תעודת זהות

לפניכם שאלון מתמטי. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן.
המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלב נוסף של התחרות ע"ש בנו ארבל במטרה להרכיב קבוצת נבחרת העתודה של נבחרת ישראל במתמטיקה. פתרונות ופרטים נוספים יופיעו באתר http://taharut.org/imo.

כתבו בטבלה המצורפת את התשובות הסופיות בלבד – אין צורך לנמק.
אין להשתמש במחשבון. משך התחרות: 90 דקות.

טבלת תשובות:

1.	2.
3.	4.
5.	6.
7.	8.
9.	

מדינת ישראל
משרד החינוך

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

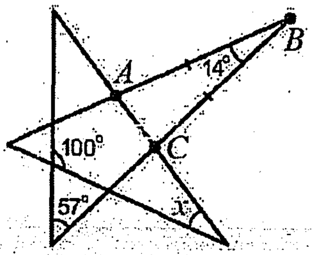
ה' בחשון תשע"ה

29.10.2014

שאלון – כיתות ט'

1. כמה פתרונות במספרים שלמים חיוביים יש למשוואה $x^2+5xy=5775$?

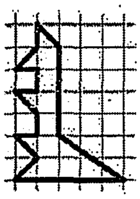
2. במשולש ABC נתון כי $AB=8$, $AC=6$ וכן כי התיכונים מ-B ומ-C מאונכים זה לזה. מצאו את אורך הצלע BC.



3. בסרטוט הבא נתונים גודליהן של שלוש זוויות.
כמו כן, ידוע, כי $AB=BC$. מה גודלה של הזווית x?

4. מכפלתם של כל המחלקים של מספר n כלשהו (כולל המספר n עצמו) היא מספר שמסתיים ב-15 אפסים בדיוק. מהו מספר האפסים המקסימאלי בו יכול להסתיים המספר n?

5. בטבלה 3×3 סדרו מספרים כלשהם כך שמכפלת המספרים בכל טור של הטבלה שווה ל-1, מכפלת המספרים בכל שורה של הטבלה שווה ל-1, ומכפלת המספרים בכל ריבוע 2×2 שיש בטבלה שווה ל-2. איזה מספר נמצא במשבצת המרכזית של טבלה זו?



6. מהו מספר המשולשים המינימאלי שאליו ניתן לחתוך את הצורה שבציור:

7. מספר 3 אפשר להציג בארבעה אופנים כסכום של כמה מספרים טבעיים (אולי 1), אם להתחשב בסדר מחוברים: $1+1+1$, $2+1$, $1+2$, 3.
בכמה אופנים אפשר להציג את המספר 2014?

8. נתונים מספרים טבעיים a,b,c, כך ש- $a<b<c$ וגם $a+b$, $a+c$ ו- $b+c$ הם ריבועים שלמים. מהו ערך המינימאלי של c?

9. לחלק 100 אגוזים ל-10 ערמות שונות בגודלם, כך שאי-אפשר לחלק אף ערמה ל-2 ערמות, שכל ה-11 ערמות יהיו שונות בגודלם.

בהצלחה!

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

מדינת ישראל
משרד החינוך

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה לכיתות ט' – שלב א'

נא למלא את כל הפרטים האישיים בכתב ברור!

בית ספר	כיתה	טלפון	שם משפחה	שם פרטי

כתובת דואר	דוא"ל

לפניכם שאלון מתמטי. השאלות אינן שגרתיות, וגם תלמידים חזקים במיוחד יתקשו לפתור את כולן.
המצטיינים יוזמנו להשתתף בשלבים נוספים של תחרויות ואימונים, שבסופם תורכב הנבחרת שתייצג את ישראל באולימפיאדה הבינלאומית למתמטיקה.
פתרונות השאלות ופרטים נוספים יופיעו באתר http://taharut.org/imo.

- מלאו בטבלה המצורפת תשובות סופיות בלבד – אין צורך לנמק.
- בשאלות, בהן קיימת יותר מתשובה אחת, יש לציין את כל התשובות האפשריות.
- אסור להשתמש במחשבון. משך המבחן: 90 דקות.

טבלת תשובות:

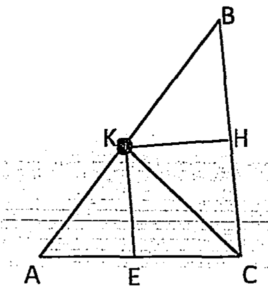
.3	.2	.1
.6	.5	.4
.9	.8	.7

שאלון - כיתות ט'

1. קבוצת ילדים חשבה על מספר טבעי, ולאחר מכן הם אמרו את 9 המשפטים הבאים: "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-2", "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-3, ואינו מתחלק ב-2", "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-4, ואינו מתחלק ב-3", ... , "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-10, ואינו מתחלק ב-9". מהי כמות המשפטים הנכונים הגדולה ביותר שיכולה להיות?

2. החליפו את האותיות בספרות על מנת לקבל שוויון נכון
(אותיות זהות – ספרות זהות, אותיות שונות – ספרות שונות).

$$\overline{\text{הבהבה}} = \overline{\text{להט}}^{2}$$



3. במשולש ABC בחרו נקודה K על הצלע AB.
KE הוא חוצה-זווית AKC, ו- KH הוא אנך ל- BC.
נתון, כי $KE \parallel BC$.
מצאו את BC, אם $HC = 3$.

4. משה כפל מספר חמש-ספרתי בסכום ספרותיו. לאחר מכן הוא כפל את התוצאה בסכום ספרותיה. המכפלה שהתקבלה הינה מספר חמש-ספרתי. מהו המספר שמשה כפל בהתחלה? מצאו את כל הפתרונות האפשריים.

5. מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר, אשר נותן שארית 6 בחילוק ב-9, שארית 8 בחילוק ב-10 ושארית 10 בחילוק ב-11.

6. כמה מספרים טבעיים $n \le 2013$ קיימים, כך שהסכום $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ מסתיים ב-0 ?

7. בתוך מקבילית $ABCD$ ולא על צלעותיה בחרו בנקודה P וחיברו אותה עם הקדקודים A, B, C, D.
שטחים של 3 מתוך 4 המשולשים שנוצרו הם 3 , 2 , 1 (בסדר כלשהו).
מהו שטחו של המשולש הרביעי?

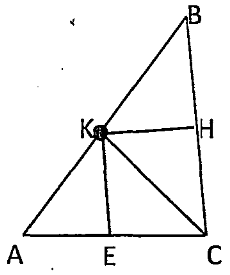
8. מצאו את הערך הגדול ביותר של הביטוי $x^2y - y^2x$,
כאשר $0 \le x \le 1$ וגם $0 \le y \le 1$.

9. חשבו את הסכום:

$$1^2 + \frac{1\cdot 2}{2} + 2^2 + \frac{2\cdot 3}{2} + 3^2 + \frac{3\cdot 4}{2} + \cdots + 999^2 + \frac{999\cdot 1000}{2} + 1000^2 .$$

בהצלחה!

פתרונות

שאלה	פתרון
1. קבוצת ילדים חשבה על מספר טבעי, ולאחר מכן הם אמרו את 9 המשפטים הבאים: "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-2", "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-3, ואינו מתחלק ב-2", "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-4, ואינו מתחלק ב-3", ... , "המספר עליו חשבנו מתחלק ב-10, ואינו מתחלק ב-9". מהי כמות המשפטים הנכונים הגדולה ביותר שיכולה להיות?	1. **תשובה:** 4 משפטים. **פתרון**: ברור שאף שני משפטים רצופים אינם יכולים להיות שניהם נכונים. לכן לא ייתכן שיותר מ-5 מבין המשפטים יהיו נכונים. כעת, נשים לב, שאם יש 5 משפטים נכונים, אזי המשפטים הנכונים בהכרח חייבים להיות משפטים מספר: 1,3,5,7,9. אולם משפטים מספר 3 ("המספר עליו חשבנו מתחלק ב-4, ואינו מתחלק ב-3"), ו-5 ("המספר עליו חשבנו מתחלק ב-6, ואינו מתחלק ב-5") סותרים אחד את השני (הסתירה היא בהתחלקות ב-3), ולכן אינם יכולים להיות שניהם נכונים. לכן לא ייתכן, שיותר מ-4 מבין המשפטים יהיו נכונים. דוגמא למספר טבעי בו 4 מבין המשפטים נכונים היא, למשל, המספר 40.
2. החליפו את האותיות בספרות על מנת לקבל שוויון נכון (אותיות זהות – ספרות זהות, אותיות שונות – ספרות שונות). $\overline{\text{הבהבה}} = \overline{\text{להט}}^{2}$	**2. תשובה**: $264^2 = 69696$
3. במשולש ABC בחרו נקודה K על הצלע AB. KE הוא חוצה-זווית AKC, ו- KH הוא אנך ל-BC. נתון, כי $BC \parallel KE$. מצאו את BC, אם $HC = 3$.  	3. **תשובה**: $BC = 6$. **פתרון**: מאחר וזוויות AKC ו-BKC צמודות, אז הזווית בין חוצי-זוויות שלהן היא בת 90°. מכאן: חוצה-זווית BKC מאונך ל-BC ($BC \parallel KE$), ז"א מתלכד עם גובה KH. אם חוצה-זווית הוא גם גובה, אז הוא גם תיכון, ז"א $BC = 2HC = 6$.
4. משה כפל מספר חמש-ספרתי בסכום ספרותיו. לאחר מכן הוא כפל את התוצאה בסכום ספרותיה. המכפלה שהתקבלה הינה מספר חמש-ספרתי. מהו המספר שמשה כפל בהתחלה? מצאו את כל הפתרונות האפשריים.	4. **תשובה:** $10000, 11000, 10100, 10010, 10001$ **פתרון**: נסמן ב-n את המספר ההתחלתי, ב-a את סכום הספרות שלו, וב-b את סכום הספרות של המספר na. מהנתון בשאלה נקבל כי: $nab < 10n$, ולכן: $ab \leq 9$. אם $a = 1$, אזי: $n = 10000$, ומקרה זה מתאים לתנאי השאלה. אם $a = 2$, אזי: $b = 4$, ומבין כל ערכי n השונים שיכולים להיות (20000, 11000, 10100, 10010, 10001), פרט ל-20000, כולם מתאימים לתנאי השאלה. אם $a = 3$, אזי: n מתחלק ב-3. לכן: $an = 3n$ מתחלק ב-9, ואז גם b מתחלק ב-9. ובמקרה זה: $ab > 3 \cdot 9 > 10$, ומקבלים סתירה לכך ש: $ab \leq 9$. אם $a = 4$, אזי: n מותיר שארית 4 בחלוקה ב-9, ולכן: $an = 4n$ מותיר שארית 7 בחלוקה ב-9, ואז גם b מותיר שארית 7 בחלוקה ב-9, ושוב מקבלים כי: $ab > 10$, - סתירה. לבסוף, אם $a \geq 5$, אזי: $b < \frac{10}{a} < 2$, כלומר: b=1. אולם המספר an נמצא בטווח המספרים שבין 10000 לבין 100000, ולכן לא ייתכן, שסכום ספרותיו יהיה 1.

5. מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר, אשר נותן שארית 6 בחילוק ב-9, שארית 8 בחילוק ב-10 ושארית 10 בחילוק ב-11.

5. **תשובה**: 978

פתרון: $N = 9k + 6$

$N = 10t + 8$ $\quad +12$

$N = 11n + 10$

אז $N + 12 = 9k + 18$ $\quad :9$

$N + 12 = 10t + 20$ $\quad :10$

$N + 12 = 11n + 22$ $\quad :11$

המספר הטבעי הקטן ביותר שמתחלק ב-9, 10, 11 הוא $N + 12 = 9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$.

מכאן $N = 978$

6. כמה מספרים טבעיים $n \le 2013$ קיימים, כך שהסכום $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ מסתיים ב-0?

6. **תשובה**: 1510.

פתרון: לכל המספרים הטבעיים קיים מחזור של 4 פעמים בחזקות, שאחריו הם חוזרים לאותם ספרי היחידות. במקרה שלנו קל לבדוק, כי עבור n הנותן שארית 1, 2 או 3 בחילוק ב-4 סכום הספרות האחרונות מסתיים ב-0

ורק עבור n שמתחלק ב-4 סכום הספרות האחרונות הוא 6 + 1 + 6 + 1, לא מסתיים ב-0. אז יש $\frac{2013-1}{4} = 503$ מקרים, שלא מתאימים לנו.

ז"א $2013 - 503$ מקרים, שמתאימים.

7. בתוך מקבילית $ABCD$ בחרו בנקודה P וחיברו אותה עם הקדקודים A, B, C, D השטחים של 3 מתוך 4 המשולשים שנוצרו הם 1, 2, 3 (בסדר כלשהו). מהו שטחו של המשולש הרביעי?

7. **תשובה**: 4 או 2.

פתרון: נעביר דרך P אנך ל-AB (CD).

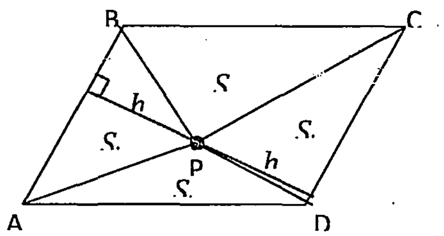
אז $S_{ABCD} = b \cdot (h_2 + h_3) = bh_2 + bh_3 = 2S_2 + 2S_3 = 2(S_2 + S_3) = 2(S_1 + S_4)$

מכאן: $S_4 = (S_2 + S_3) - S_1$

ז"א $S_4 = 2 + 3 - 1 = 4$

או $S_4 = 3 + 1 - 2 = 2$.

מקרה שלישי ($S_4 = 1 + 2 - 3 = 0$) לא רלוונטי, כי אז הנקודה P לא נמצאת בתוך המקבילית.



8. מצאו את הערך הגדול ביותר של הביטוי $x^2y - y^2x$, כאשר $0 \le x \le 1$ וגם $0 \le y \le 1$.

8. **תשובה**: $\frac{1}{4}$

פתרון: נתבונן בפונקציה ריבועית $f(y) = -xy^2 + x^2y$, שהיא פרבולה הפוכה עם מקסימום בנקודה $y = \frac{x}{2}$.

אז כאשר ניקח $x_{max} = 1$

ו- $y = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$,

נקבל $1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

9. חשבו את הסכום

$$1^2+\frac{1\cdot2}{2}+2^2+\frac{2\cdot3}{2}+3^2+\frac{3\cdot4}{2}+\cdots+999^2+\frac{999\cdot1000}{2}+1000^2$$

9. **תשובה**: $500500000=\frac{1000^2\cdot1001}{2}$

פתרון: קל לבדוק,

כי $\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)^2}{2}$ (1)

וגם $\frac{n(n+1)^2}{2}+(n+1)^2=\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)}{2}$ (2)

אז, אם נתחיל מכך

ש- $1^2+\frac{1\cdot2}{2}+2^2=\frac{2^2\cdot3}{2}$

ונשתמש לסירוגין ב-(1) ו-(2), נקבל בסוף:

$$1^2+\frac{1\cdot2}{2}+$$

$$+2^2+\frac{2\cdot3}{2}+3^2+\cdots+\frac{999\cdot1000}{2}+$$

$$+1000^2=\frac{1000^2\cdot1001}{2}$$