1. أ) أوجد/ي منزلة الآحاد للعدد التالي:

$$\left(101^2-100^2\right)\cdot\left(102^2-101^2\right)\cdot\left(103^2-102^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(200^2-199^2\right)$$

ب) أوجد/ي منزلة العشرات لنفس العدد.

2. $\Delta A_1A_2A_3,\ \Delta B_1B_2B_3,\ \Delta C_1C_2C_3$ هي ثلاثة مثلثات متساوية الأضلاع (يتم ترقيم رؤوس المثلثات مع عقارب الساعة). معطى $A_3=B_3=C_3$. النقطتان N و M هما مركز الثقل لكل من المثلثين $\Delta A_1B_1C_1,\ \Delta A_2B_2C_2$ على التوالي. أثبت/ي أن $\Delta A_3M\,N$ هو مثلث متساوي الأضلاع.
ملاحظة: مركز الثقل في المثلث هو نقطة تقاطع متوسطات المثلث.

3. ABCDEF هو سداسي الأضلاع محدب. في السداسي هناك نقطة K بحيث أن كلاً من الشكلين الرباعيين ABCK و DEFK هو متوازي أضلاع. أثبت/ي أن القطع المستقيمة الثلاثة الواصلة بين الرؤوس A, B, C ومنتصفات القطع CE, DF, EA على التوالي تلتقي في نقطة واحدة.

4. معطى صف مكون من n ≥ 7 مربعات. في المربعات الثلاثة الواقعة أقصى اليسار يقف ثلاثة جنود من اللون الأبيض، وفي المربعات الثلاثة في أقصى اليمين يقف ثلاثة جنود من اللون الأسود. كل من اللاعب الأبيض والأسود يلعبون بالتناوب بحيث يبدأ اللاعب الأبيض. في كل حركة يسمح للاعب بتحريك جندي من اللون التابع له إلى مربع مجاور بشرط أن لا يكون المربع محتلاً من جندي من نفس اللون. أما إذا كان محتلاً من قبل جندي من اللون المضاد، يقوم اللاعب بإنزال كلا الجنديين عن اللوح (جُنديّهُ وجندي اللاعب الخصم). اللاعب الذي يقوم بإنزال آخر جنديين عن اللوح هو الفائز.
أي من اللاعبين الأبيض أم الأسود لديه استراتيجية رابحة؟ وما هي؟ (الإجابة يمكن أن تعتمد على العدد n).

5. ليكن p كثير حدود ذا معاملات صحيحة بحيث يحقق $p(5)=25\ ,\ p(14)=16\ ,\ p(16)=36$
أوجد/ي كل القيم الممكنة لـ $p(10)$.

6. معطى العدد الطبيعي n. أوجد/ي أكبر عدد حقيقي k يحقق المتباينة التالية <u>لكل n من الأعداد الحقيقية</u> $x_1,x_2,\ldots,x_n$:*

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2}\geq k\cdot\min\left(|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,\ldots,|x_{n-1}-x_n|,|x_n-x_1|\right)$$

(الإجابة يمكن أن تعتمد على n).
*min = القيمة الأدنى من بين القيم المعطاة بين القوسين.

7. أوجد/ي عدد حقيقي x يحقق المعادلة $\frac{x^7}{7}=1+\sqrt[7]{10}\,x\left(x^2-\sqrt[7]{10}\right)^2$.

אולימפיאדה במתמטיקה ע"ש פרופ' גיליס – תשע"ד 2013

1. א. מצא/י את ספרת היחידות של המספר

$$\left(101^2-100^2\right)\cdot\left(102^2-101^2\right)\cdot\left(103^2-102^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(200^2-199^2\right)$$

ב. מצא/י את ספרת העשרות של אותו המספר.

2. יהיו $\Delta A_1A_2A_3,\ \Delta B_1B_2B_3,\ \ \Delta C_1C_2C_3$ שלושה משולשים שווי צלעות (הקודקודים בכל אחד מהמשולשים ממוספרים בכיוון השעון). נתון: $A_3=B_3=C_3$. נסמן ב- M, N את מרכזי הכובד של המשולשים $\Delta A_1B_1C_1,\ \ \Delta A_2B_2C_2$. הוכיחו כי ΔA_3MN הוא משולש שווה צלעות.

הערה: מרכז הכובד של משולש הוא נקודת החיתוך של התיכונים במשולש זה.

3. ABCDEF הוא משושה קמור. במשושה קיימת נקודה K, כך שהמרובעים ABCK ו- DEFK שניהם מקבילית. הוכח/י כי שלושת הישרים המחברים את הקדקודים A, B, C לאמצעי הקטעים CE, DF, EA בהתאמה, נחתכים בנקודה אחת.

4. נתונה שורה של $n\geq 7$ משבצות. בשלושת המשבצות השמאליות ביותר עומדים חיילים לבנים; בשלושת המשבצות הימניות ביותר עומדים חיילים שחורים. השחקן הלבן והשחקן השחור משחקים בתורות; השחקן הלבן מתחיל. בכל מהלך מותר לכל שחקן לקחת חייל בצבע שלו ולהזיז אותו למשבצת סמוכה, כל עוד היא לא תפוסה על ידי חייל <u>באותו הצבע</u>. אם במשבצת שאליה הוא מזיז את החייל יש כבר חייל <u>בצבע הנגדי</u>, השחקן מוריד מהלוח את שני החיילים (החייל שלו והחייל של היריב). השחקן שמוריד את שני החיילים האחרונים מהלוח מנצח.

למי יש אסטרטגיה מנצחת, ללבן או לשחור, ואיזו? (התשובה יכולה להיות תלויה ב- n).

5. פולינום p בעל מקדמים שלמים מקיים $p(16)=36$, $p(14)=16$, $p(5)=25$.
מצא/י את כל הערכים האפשריים עבור $p(10)$.

6. נתון n טבעי. מצא את המספר הממשי k הגדול ביותר, עבורו <u>לכל n מספרים ממשיים</u> $x_1,x_2,\ldots,x_n$ מתקיים אי-השוויון*:

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2}\geq k\cdot\min\left(\left|x_1-x_2\right|,\left|x_2-x_3\right|,\ldots,\left|x_{n-1}-x_n\right|,\left|x_n-x_1\right|\right).$$

(התשובה יכולה להיות תלויה ב- n).

*min = הערך המינימלי מבין קבוצת הערכים הנתונים בסוגריים.

7. מצאו x ממשי שמקיים $\frac{x^7}{7}=1+\sqrt[7]{10}\,x\left(x^2-\sqrt[7]{10}\right)^2$.

בהצלחה!

גיליס - תשע"ד - פתרונות

1. א. מצא/י את ספרת היחידות של המספר

$$\left(101^2-100^2\right)\cdot\left(102^2-101^2\right)\cdot\left(103^2-102^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(200^2-199^2\right)$$

ב. מצא/י את ספרת העשרות של אותו המספר.

תשובה. א. 5. ב. 2.

פתרון. נשתמש בנוסחה $(n+1)^2-n^2=2n+1$, ואז המכפלה תירשם בצורה הבאה:

$$201\cdot203\cdot205\cdot\ldots\cdot399.$$

(בסוגריים הראשונים n=100, בסוגריים השניים n=101 וכן והלאה)

א. נשים לב שכל הגורמים במכפלה אי-זוגיים, ויש גם כאלה שמתחלקים ב-5. לכן, התוצאה של המכפלה מתחלקת ב-5 אבל לא ב-2. מספר מתחלק ב-5 רק אם הוא מסתיים ב-0 או ב-5, כאשר ב-0 מסתיימים מספרים זוגיים בלבד. במקרה זה, אם המספר מסתיים הוא אי-זוגי, הוא בהכרח יסתיים ב-5.

ב. נשים לב כי יש לפחות שני מספרים במכפלה שמתחלקים ב-5, למשל 205 , 215. לכן, המכפלה מתחלקת ב-25. כל כפולה של 25 מסתיימת באחד הרצפים הבאים: 00, 25, 50, 75. אבל המספר שלנו אי-זוגי, לכן הוא מסתיים ב-25 או ב-75. נשים לב, שכל מספר שמסתיים ב-25 הוא מסוג $4k+1$ (k מספר שלם, משמע המספר נותן שארית 1 בחלוקה ל-4) וכל מספר שמסתיים ב-75 הוא מסוג $4k-1$ (שארית 3 בחלוקה ל-4).

אם נבדוק, נראה כי מכפלת שני מספרים מסוג $4k+1$ או שני מספרים מסוג $4k-1$ היא מסוג $4k+1$, ואילו במכפלת שני מספרים שאחד מהם מסוג $4k+1$ והשני מסוג $4k-1$ מתקבלת תוצאה מסוג $4k-1$. לכן, מכפלת המספרים תהיה מסוג $4k+1$ אם ורק אם יש במכפלה זו מספר זוגי של מספרים מסוג $4k-1$. במקרה שלנו כופלים 100 מספרים, שבדיוק 50 מהם (אלו שבמקומות הזוגיים) הם מסוג $4k-1$, ולכן המכפלה היה מספר מסוג $4k+1$.

מכאן שהמספר מסתיים ב-25.

2. יהיו $\Delta A_1A_2A_3,\ \Delta B_1B_2B_3,\ \Delta C_1C_2C_3$ שלושה משולשים שווי צלעות (הקודקודים בכל אחד מהמשולשים ממוספרים בכיוון השעון). נתון: $A_3=B_3=C_3$. נסמן ב-M, N את מרכזי הכובד של המשולשים $\Delta A_1B_1C_1,\ \Delta A_2B_2C_2$. הוכיחו כי ΔA_3MN הוא משולש שווה צלעות.

הערה: מרכז הכובד של משולש הוא נקודת החיתוך של התיכונים במשולש זה.

פתרון. סיבוב ב- 60° מסביב לנקודה $A_3=B_3=C_3$ יעביר את נקודה A_1 לנקודה A_2, נקודה B_1 לנקודה B_2, ונקודה C_1 לנקודה C_2. לכן, הוא יעביר גם את נקודה M לנקודה N. מכאן המשולש A_3MN הוא שווה צלעות.

3. ABCDEF הוא משושה קמור. במשושה קיימת נקודה K, כך שהמרובעים ABCK ו- DEFK שניהם מקביליות. הוכח/י כי שלושת הישרים המחברים את הקודקודים A, B, C לאמצעי הקטעים CE, DF, EA בהתאמה, נחתכים בנקודה אחת.

פתרון. צלעות נגדיות של מקבילית יוצרות וקטורים שווים, לכן $D-E=K-F$, במילים אחרות $D-E+F=K$. באופן דומה גם $A-B+C=K$.

לכן $A-B+C=D-E+F$, כלומר $A+C+E=B+D+F$.

במילים אחרות $\frac{A+C+E}{3}=\frac{B+D+F}{3}$. כלומר נקודות מפגש התיכונים של המשולשים ACE, BDF מתלכדות. לכן כל ששת התיכונים של המשולשים ACE ו- BDF עוברים דרך אותה נקודה, בכללם גם התיכונים ששאלו עליהם.

4. נתונה שורה של $n\geq 7$ משבצות. בשלושת המשבצות השמאליות ביותר עומדים חיילים לבנים; בשלושת המשבצות הימניות ביותר עומדים חיילים שחורים. השחקן הלבן והשחקן השחור משחקים בתורות; השחקן הלבן מתחיל. בכל מהלך מותר לכל שחקן לקחת חייל בצבע שלו ולהזיז אותו למשבצת סמוכה, כל עוד היא לא תפוסה על ידי חייל <u>באותו הצבע</u>. אם במשבצת שאליה הוא מזיז את החייל יש כבר חייל <u>בצבע הנגדי</u>, השחקן מוריד מהלוח את שני החיילים מהלוח (החייל שלו והחייל של היריב). השחקן שמוריד את שני החיילים האחרונים מהלוח מנצח.

למי יש אסטרטגיה מנצחת, ללבן או לשחור, ואיזו? (התשובה יכולה להיות תלויה ב-n).

תשובה. אם n זוגי, אז לראשון; אם n אי-זוגי, לשני.

פתרון. נצבע את משבצות השורה צביעת שחמט: כל משבצת שחורה או לבנה, כך שמשבצות סמוכות תמיד בצבעים הפוכים. נשים לב, שכל מהלך של כל שחקן משנה את הזוגיות של כמות החיילים על המשבצות הלבנות (כאשר מורידים שני חיילים שהם על אותה משבצת מהלוח, הזוגיות לא משתנה). נשים לב, שהשחקן שינצח יביא לכך שמספר החיילים על המשבצות הלבנות יהיה זוגי (אפס חיילים). לכל n יש שחקן שאחרי כל מהלך שלו מספר החיילים על המשבצות הלבנות הוא אי-: כאשר n זוגי זהו השחקן השני, וכאשר n אי-זוגי זהו השחקן הראשון (שחקו ותראו). שחקן זה לא יכול לנצח, לא משנה כיצד שני הצדדים ישחקו. לעומת זאת, השחקן האחר יוכל להתקדם עם החיילים שלו

לקראת החיילים של השחקן היריב, ואז בשלב מסוים כל החיילים יורדו מהלוח, והשחקן היחיד שיכול לנצח- ינצח.

5. פולינום p בעל מקדמים שלמים מקיים $p(16)=36$, $p(14)=16$, $p(5)=25$.
מצא/י את כל הערכים האפשריים עבור $p(10)$.

תשובה. כל מספר שלם שמתחלק ב-120.

פתרון. הפולינומים $p(x)=(10-x)^2+n\cdot(x-5)(x-14)(x-16)$ מקיימים את התנאים בשאלה לכל n שלם. הערכים שמתקבלים מפולינומים מסוג זה הם $p(10)=n\cdot5\cdot4\cdot6=120\cdot n$. לכן אפשר לקבל כל מספר שמתחלק ב-120.

פתרון בדרך נוספת: נניח כי $p(10)=a$. אז הפולינום $q(x)=p(x)-(x-10)^2$ גם הוא מקבל ערך a ב-x=10, ובנקודות 16 , 14 , 5 הפולינום q(x) מתאפס. לכן הפולינום מתחלק בשלמות בפולינומים $x-16$, $x-14$, $x-5$, ואז $q(x)=r(x)(x-5)(x-14)(x-16)$, כאשר גם הפולינום r הוא בעל מקדמים שלמים. נציב $x=10$ ונקבל

$$a=r(10)\cdot5\cdot4\cdot6=r(10)\cdot120$$

ובכן, a , שהוא p(10) , מתחלק ב-120.

6. נתון n טבעי. מצא את המספר הממשי k הגדול ביותר, עבורו <u>לכל</u> n מספרים ממשיים $x_1,x_2,...,x_n$ מתקיים אי-השוויון*:

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2+x_n^2}\geq k\cdot\min\left(|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,...,|x_{n-1}-x_n|,|x_n-x_1|\right).$$

(התשובה יכולה להיות תלויה ב- n).

*min = הערך המינימלי מבין קבוצת הערכים הנתונים בסוגריים.

תשובה. עבור n זוגי $\frac{\sqrt{n}}{2}$, עבור n אי-זוגי $\frac{\sqrt{n+5}}{2}$.

פתרון. אם $\min\left(|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,...,|x_{n-1}-x_n|,|x_n-x_1|\right)=0$ אז בהכרח אגף שמאל באי-שוויון גדול או שווה לאפס, אך במקרה זה לא נוכל להסיק דבר על k .

לכן נבדוק את המצבים בהם $\min\left(|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,\ldots,|x_{n-1}-x_n|,|x_n-x_1|\right)=\lambda>0$.

ניתן להחליף כל x_i ב- $\frac{x_i}{\lambda}$, ואז גם האגף השמאלי וגם הימני של אי-שוויון יהיה מחולק ב-λ. לכן אפשר לנסח את השאלה בצורה כזאת: בהינתן $\min\left(|x_1-x_2|,\ldots,|x_n-x_1|\right)=1$, יש למצוא את המינימום של $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2$ (שיקרא k^2).

טענה 1. אם $|a-b|\geq 1$ אז $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$.

באמצעות טענה 1 קל לסיים את הפתרון למקרה של n זוגי.

אכן, לפי הטענה $x_1^2+x_2^2\geq\frac{1}{2}$, ואותו דבר עבור $x_3^2+x_4^2$, $x_5^2+x_6^2$, ... , $x_{n-1}^2+x_n^2$, ולכן $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2\geq\frac{n}{4}$ (יש $\frac{n}{2}$ זוגות). השוויון מתקיים עבור הסדרה

$$x_1=\tfrac{1}{2}\ ,\ x_2=-\tfrac{1}{2}\ ,\ x_3=\tfrac{1}{2}\ ,\ x_4=-\tfrac{1}{2}\ ,\ \ldots$$

לכן $k^2=\frac{n}{4}$ עבור n זוגי.

בשביל לסיים את המקרה בו n אי-זוגי צריך טענה נוספת:

טענה 2. אם b נמצא בין a ל-c, (כלומר $a<b<c$, או להפך $a>b>c$) והמספרים $|b-a|$, $|c-b|$ גדולים מ-1, אז $a^2+b^2+c^2\geq 2$.

כאשר עוברים במעגל על הסדרה המעגלית $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1$ אז לפעמים רואים עליות ולפעמים ירידות (כל פעם יש קפיצה לפחות ב-1, משום שמינימום ההפרש בין 2 סמוכים הוא 1, ולכן אף מספר לא שווה למספר הקודם). סה"כ יש מספר אי-זוגי של צעדים, לכן לא יתכן שאחרי כל עליה יש ירידה ואחרי כל ירידה יש עליה. לכן מתישהו עושים שני צעדים באותו כיוון: למשל x_{i+1} נמצא בין x_i לבין x_{i+2}. סכום הריבועים בשלשה הזאת לפי טענה 2 תורם לפחות 2 לסכום הכולל. את המספרים האחרים ניתן לחלק לזוגות של xים רצופים, וסכום הריבועים בכל זוג (לפי טענה 1) יהיה $\frac{1}{2}$. לכן $\sum_i x_i^2\geq 2+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{1}{2}=2+\frac{n-3}{4}=\frac{n+5}{4}$.

השוויון מתקיים עבור הסדרה

$$x_1=\tfrac{1}{2}\ ,\ x_2=-\tfrac{1}{2}\ ,\ x_3=\tfrac{1}{2}\ ,\ x_4=-\tfrac{1}{2}\ ,\ \ldots\ ,\ x_{n-2}=1\ ,\ x_{n-1}=0\ ,\ x_n=1.$$

נשאר להוכיח את הטענות.

הוכחת טענה 1. ניתן לרשום את המספרים a,b בתור $x\pm\frac{1}{2}z$, כאשר $x=\dfrac{a+b}{2}$, $z=|a-b|\ge1$. ואז $a^2+b^2=\left(x+\frac{1}{2}z\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}z\right)^2=2x^2+\frac{1}{2}z^2\ge\frac{1}{2}z^2\ge\frac{1}{2}$.

הוכחת טענה 2. במצב ש-$a<b<c$ (המצב ההפוך של $a>b>c$ הוא אותו דבר), אם בנוסף $b-a\ge1$ וגם $c-b\ge1$ אז $c-a\ge2$. נסמן $x=\dfrac{c+a}{2}$, $z=\dfrac{c-a}{2}\ge1$. אז

$$a^2+b^2+c^2\ge a^2+c^2=(x-z)^2+(x+z)^2=2x^2+2z^2\ge2z^2\ge2.$$

7. מצאו x ממשי שמקיים $\dfrac{x^7}{7}=1+\sqrt[7]{10}\,x\left(x^2-\sqrt[7]{10}\right)^2$.

תשובה. $\sqrt[7]{2}+\sqrt[7]{5}$.

פתרון. נחפש פתרון בצורת $x=\sqrt[7]{a}+\sqrt[7]{b}$. אזי

$$\frac{x^7}{7}=\frac{a}{7}+\sqrt[7]{a^6b}+3\sqrt[7]{a^5b^2}+5\sqrt[7]{a^4b^3}+5\sqrt[7]{a^3b^4}+3\sqrt[7]{a^2b^5}+\sqrt[7]{ab^6}+\frac{b}{7}=$$
$$=\frac{a+b}{7}+\sqrt[7]{ab}\left(\sqrt[7]{a}+\sqrt[7]{b}\right)\left(\sqrt[7]{a^4}+2\sqrt[7]{a^3b}+3\sqrt[7]{a^2b^2}+2\sqrt[7]{ab^3}+\sqrt[7]{b^4}\right)=$$
$$=\frac{a+b}{7}+\sqrt[7]{ab}\left(\sqrt[7]{a}+\sqrt[7]{b}\right)\left(\sqrt[7]{a^2}+\sqrt[7]{ab}+\sqrt[7]{b^2}\right)^2=\frac{a+b}{7}+\sqrt[7]{ab}\cdot x\left(x^2-\sqrt[7]{ab}\right)^2$$

אם $7=a+b$, $10=ab$ נקבל בדיוק את המשוואה שצריך.

קל לנחש כי $b=5$, $a=2$ יעבוד.

הערה. כל השורשים המרוכבים הם $x_k=e^{2\pi ik/7}\cdot\sqrt[7]{5}+e^{-2\pi ik/7}\cdot\sqrt[7]{2}$, כאשר $k=1,2,\dots,7$.